L1 Portail Descartes

Electricité

Laurent Lapena – laurent.lapena@univ-mrs.fr

Version 2018/2019 – V2

Table des matières

I- Introduction à l'électricité

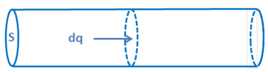
1. Conducteurs, charge et courant électrique

1.1 Conducteur :

Le conducteur est le matériau dans lequel des charges électriques sont libres de se déplacer. Il s'agit d'électrons dans le cas de métaux ou encore d'ions (+ ou -) dans le cas d'un électrolyte (liquide conducteur).
Une charge est notée, *q* ou *Q* et s'exprime en Coulomb (C), la charge de l'électron est négative et s'écrit $q_e = -1{,}6.10^{-19}$C.

1.2 Courant électrique :

Le courant électrique est un déplacement de particules chargées dans un milieu conducteur. Son intensité correspond au débit de charges *dq* qui traverse la surface *S* du conducteur par unité de temps. L'intensité du courant est notée *I* s'exprime en Ampère (A) ou Coulomb par seconde ($C.S^{-1}$).



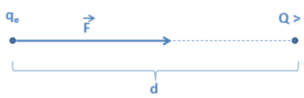
$$\boldsymbol{I = \frac{dq}{dt}} \qquad \textbf{(1)}$$

Le courant électrique peut être « vu » comme un écoulement de charges de façon analogue à un écoulement d'eau dans un tuyau.

2. Potentiel et tension électrique

2.1 Notion de potentiel :

● Imaginons un électron, immobile, isolé dans le vide, il ne subit aucune force, son énergie potentielle est nulle : *Ep = 0.* Plaçons maintenant une charge *Q* positive à une à une distance d de cet électron, son énergie potentielle devient non nulle et l'électron se met en mouvement : *Ep ≠ 0.*
Les interactions entre charges électriques ont étés largement étudiées par Coulomb (1736-1806). La force électrostatique ou force de Coulomb que subit l'électron s'écrit :



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_e Q}{d^2}\vec{u} = q_e\vec{E}.$$

Cette force dépend de toutes les charges électriques *(Q)* qui sont en interaction avec la charge considérée *(q_e).* Cela se résume dans une propriété de l'espace : le champ électrique noté $\vec{E}$. Le champ électrique s'exprime en Newton par Coulomb ($N.C^{-1}$).

● Le potentiel électrique *V* en un point *(M)*, noté *V(M)* ou encore V_M, du champ $\vec{E}$ est défini comme l'énergie potentielle d'une charge unité en ce point. Autrement dit pour :

$$\left.\begin{array}{l}\text{- une charge unité } V_M = Ep \\ \text{- une charge q quelconque } V_M = Ep / q\end{array}\right\} \qquad \boldsymbol{E_P = q.V_M} \qquad \textbf{(2)}$$

L'unité du potentiel électrique est le Joule par Coulomb ($J.C^{-1}$) appelé volt (V) en référence à Volta (1745-1827) notamment célèbre pour son invention de la première pile électrique (1800).

Le potentiel électrique peut être assimilé à l'altitude au travers d'une analogie mécanique :
- l'énergie potentielle d'une masse m d'eau retenue dépend de sa hauteur $Ep = m.g.h$
- l'énergie potentielle d'une charge q dépend du potentiel auquel elle est soumise : $Ep = q.V$

2.2 Notion de tension :

● Si on considère une charge q qui sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ est amenée du point A au point B alors la variation d'énergie potentielle entre les deux points est $\Delta Ep = q.(V_A - V_B)$.

$$\boldsymbol{U_{AB} = V_A - V_B} \quad \textbf{(3)}$$

On définit la tension U_{AB} comme la différence de potentiel entre le point A et le point B. Une tension s'exprime donc en volt (V).

$\Delta Ep = q.U_{AB}$ correspond au travail $\vec{F}.\vec{d}_{AB}$ de la force de Coulomb lors du déplacement de la charge q de A à B peut donc s'exprimer en (J) ou (C.V) ou encore (N.m). L'analyse aux dimensions montre que le champ électrique $\vec{E}$ ($N.C^{-1}$) s'exprime également en ($V.m^{-1}$) qui est l'unité usuelle.

3. Conduction, résistance et loi d'Ohm

3.1 Notions de conduction :

● Si on considère un conducteur métallique où $\vec{E} = \vec{0}$ (autrement dit il n'y a pas de différence de potentiel entre deux points du conducteur) alors les électrons libres de ce conducteur sont uniquement soumis à l'agitation thermique et leur mouvement est aléatoire. Dans ce cas, la vitesse moyenne de déplacement des électrons appelée vitesse de dérive est nulle *($\langle v \rangle = v_d = 0$)* alors que la vitesse individuelle d'un électron (liée à l'agitation thermique) est de l'ordre de $10^5 m.s^{-1}$.

● Si le même conducteur métallique est soumis à $\vec{E} \neq \vec{0}$ (autrement dit il existe une tension entre deux points du conducteur) alors les électrons vont avoir un mouvement d'ensemble vers le potentiel le plus élevé et par conséquent une vitesse de dérive non nulle. Cette vitesse est très lente, limitée par les chocs subis par les électrons lors de leur déplacement à quelques *$\langle v \rangle = v_d \approx 10^{-4} m.s^{-1}$*.

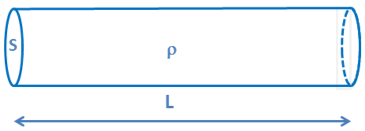
On peut ainsi mesurer les limites de l'analogie entre un écoulement d'eau et un écoulement de charges car ces dernières sont quasi immobiles en regard de la vitesse du signal électrique. En effet, lorsque l'on met un système sous tension (par exemple en fermant un interrupteur) le signal électrique se propage à la vitesse d'une onde électromagnétique ($\approx 2.10^8 m.s^{-1}$ dans le cuivre).

3.2 *Notion de résistance :*

● La limitation de la vitesse de déplacement des charges (e^- par ex.) dans un conducteur due aux collisions avec ses atomes est associée à la notion de résistance. La résistance, notée *R*, s'exprime en Ohm (Ω) caractérise la capacité du composant à s'opposer au passage du courant électrique.

De même, on définit la résistivité ρ qui caractérise la capacité à laisser passer le courant, elle s'exprime en Ohm mètre (Ω.m). ρ dépend de la nature du matériau et de sa température (si *T* augmente, le nombre de chocs également, et donc ρ augmente).

Pour un conducteur de longueur *L* et de section *S* la résistance est :

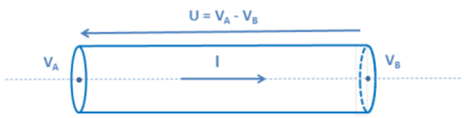


$$\boldsymbol{R = \rho\,\frac{L}{S}} \qquad \textbf{(4)}$$

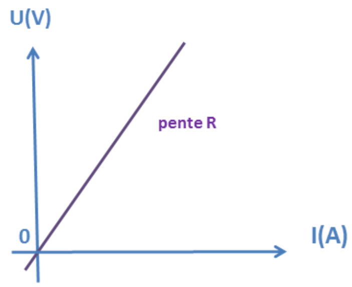
Pour les métaux $\rho \sim 10^{-8}\,\Omega$.m, pour les isolants $10^{10}\,\Omega\text{.m} < \rho < 10^{15}\,\Omega$.m.

3.3 *Loi d'Ohm :*

La résistance d'un conducteur correspond au rapport entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse, ceci se traduit par la loi d'Ohm (1789–1854):



$$\boldsymbol{U = R.I} \qquad \textbf{(5)}$$



Si l'on reporte la tension en fonction du courant, on obtient la caractéristique tension-courant qui est une droite passant par l'origine dont la pente est *R*.

Bien avant la découverte des électrons, Ampère (1775-1836) pensait que des particules chargées en mouvement étaient à l'origine des phénomènes électromagnétiques observés à cette époque. Il a inventé les termes de courant et de tension mais ne savait pas que la particule en mouvement qu'il avait pressenti portait une charge négative… d'où le sens des électrons est opposé à celui du courant électrique.

4. Puissance électrique

● Dans un conducteur l'énergie mise en jeu lors du déplacement de Δq charges entre deux points soumis à des potentiel V_A et V_B est $\Delta E_P = \Delta q.U_{AB}$. Les collisions entre les charges (électrons) et les atomes du conducteur sont une manifestation de la résistance électrique. La dissipation de cette énergie de nature électronique sous la forme de chaleur est appelée Effet Joule.

● La puissance électrique correspond à la quantité d'énergie délivrée pendant un temps Δt par ces Δq charges en mouvement soit : $\boldsymbol{P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta q . U_{AB}}{\Delta t} = U . I}$ **(6)**

La puissance P s'exprime en Watts (W) = ($J.S^{-1}$)= (V.A).

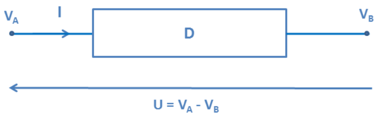
Pour un conducteur ohmique la puissance électrique peut s'exprimer par : $P = U.I = R.I^2 = \frac{U^2}{R}$.

II- Dipôles et réseaux électriques

5. Notion de dipôle électrique

5.1 Représentation :

C'est un composant électrique relié par deux bornes qui sous l'action d'une tension *u(t)* est traversé par un courant d'intensité *i(t)*.

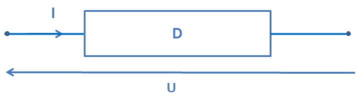


u(t) et i(t) sont des grandeurs algébriques.

Le sens du courant (opposé au sens des e-) est représenté par une flèche sur le conducteur.
La tension U ou ddp $V_A - V_B$ est représentée par une flèche à côté du dipôle allant de *B* vers *A*.

5.2 Convention :

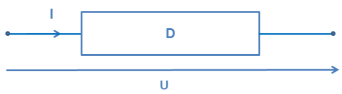
En fonction du sens relatif de U et I on définit une convention récepteur ou générateur :



Convention récepteur :
- I et U sont positifs et de sens opposés.

S'applique aux dipôles qui vont consommer de l'énergie : ampoule, résistance, capacité, bobine, diode, …

On parle de dipôles passifs.



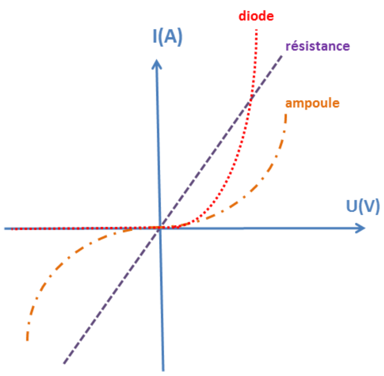
Convention générateur :
- I et U sont positifs et de même sens.

S'applique aux dipôles qui vont fournir de l'énergie : pile, batterie, source de tension, source de courant …

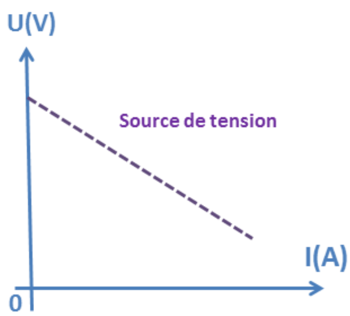
On parle de dipôles actifs.

5.3 Caractéristique électrique:

Un dipôle est caractérisé par sa courbe *I=f(U)* ou *U=f(I)* notée aussi *i(U)* ou *U(I)*



Dipôle récepteur ou passif, la caractéristique électrique passe par l'origine

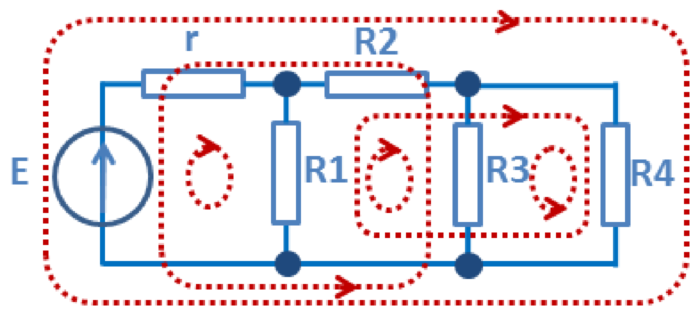


Dipôle générateur ou actif, la caractéristique électrique ne passe pas par l'origine

6. Notion de réseau électrique

6.1 Réseau *:*

Un ensemble de dipôles reliés par des fils conducteurs de résistances négligeables constitue un réseau électrique aussi appelé circuit électrique. On distingue dans l'exemple suivant :



- 4 nœuds repérés par les symboles ●

- 6 mailles repérées par les traits pointillés

maille = parcours fermé passant une seule fois par un nœud.

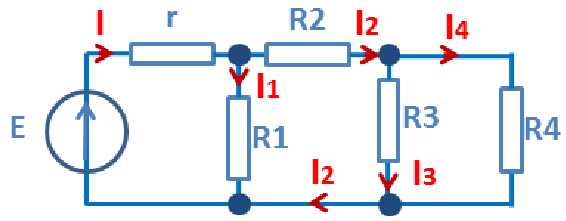
La résistance des fils conducteurs reliant les différents dipôles est considérée comme nulle.

6.2 Lois de Kirchhoff :

Les lois de Kirchhoff (1824-1887) décrivent les lois de conservations dans les circuits électriques.

● Loi des nœuds

Les charges électriques sont conservées lors de leurs déplacements dans un circuit électrique



La somme algébrique des courants qui arrivent en un nœud est nulle :

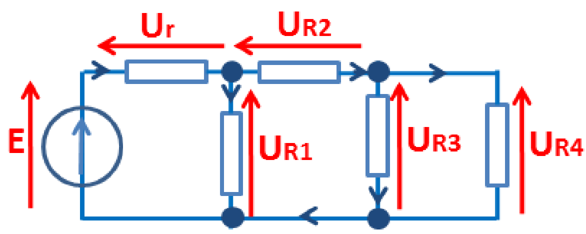
$$\sum_k I_k = 0 \qquad (7)$$

Cela se traduit pour les 4 nœuds de ce circuit par :

$I - I_1 - I_2 = 0$; $I_2 - I_3 - I_4 = 0$; $I_3 + I_4 - I_2 = 0$; $I_1 + I_2 - I = 0$.

● Loi des mailles

La conservation de l'énergie potentielle s'exprime au travers des tensions dans une maille.



La somme algébrique des tensions aux bornes des dipôles d'une maille orientée aléatoirement est nulle :

$$\sum_k U_k = 0 \qquad (8)$$

Cela se traduit pour les 6 mailles de ce circuit orientées comme sur la figure du paragraphe ① par :

$E - U_r - U_{R1} = 0$; $U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} = 0$; $- U_{R3} + U_{R4} = 0$;

$- E + U_{R3} + U_{R2} + U_r = 0$; $U_{R1} - U_{R2} - U_{R4} = 0$; $E - U_r - U_{R2} - U_{R4} = 0$.

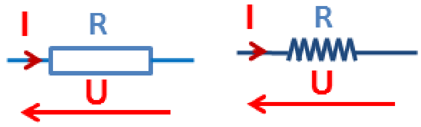
7. Dipôles linéaires & Associations

Un dipôle linéaire présente toujours une caractéristique *I(U)* ou *U(I)* dont les variations sont linéaires. La caractéristique *I(U)* ou *U(I)* d'un dipôle passif passe toujours par l'origine alors que celle d'un dipôle actif ne passe jamais par l'origine.

7.1 Dipôles passifs :

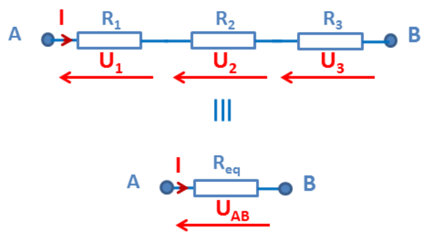
● Résistor ou résistance

C'est le seul dipôle passif qui vérifie la loi d'Ohm $U = R.I$ (5),
R s'exprime en Ohm (Ω).



Association série de résistances
Le même courant I traverse toutes les résistances :
$U_{AB} = U_1 + U_2 + U_3 = R_1.I + R_2.I + R_3.I = Req.\ I$
$Req = R_1 + R_2 + R_3$

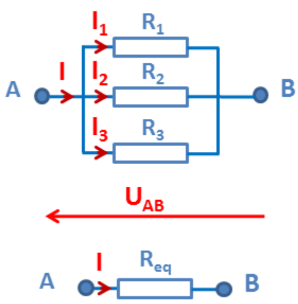
Pour N résistances en série : $$\boldsymbol{Req = \sum_{k=1}^{N} R_k} \quad (9)$$



Association parallèle de résistances (dérivation)
La même tension est appliquée à toutes les résistances :
$I = I_1 + I_2 + I_3 = U/R_1 + U/R_2 + U/R_3 = U/Req.$
$1/Req = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$

Pour N résistances en dérivation : $$\boldsymbol{\frac{1}{Req} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}} \quad (10)$$

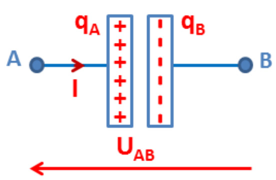
Si $N = 2$: $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



● Condensateur

Un condensateur est constitué d'une association de conducteurs métalliques séparés par un isolant (vide ou milieu diélectrique).

Si un condensateur plan constitué de deux plaques métalliques parallèles (armatures) est soumis à une tension U_{AB} telle que $V_A > V_B$, des électrons de l'armature A vont être attirés par le potentiel V_A. L'armature A va ainsi présenter une charqe $q_A > 0$. Par influence électrostatique l'armature B va présenter une charge opposée $q_B = - q_A$.



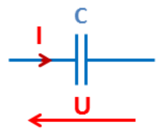
La charge portée par une armature est proportionnelle à la tension appliquée au condensateur selon la relation (11) où C est la charge maximale par unité de tension appelée capacité. Elle s'exprime en Farad notée (F).

$$\boldsymbol{q = C.U} \quad (11)$$

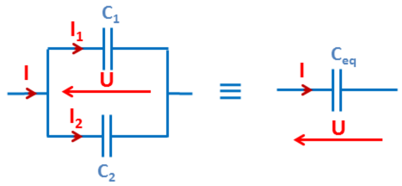
Le courant dans un condensateur, cf. (1), dépend donc des variations de la tension appliquée au cours du temps ; Le condensateur s'oppose aux variations de la tension à ses bornes ; Si cette tension est continue alors le courant est nul.

$$\boldsymbol{I = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU}{dt}} \quad (12)$$

Attention : malgré le déplacement de charges aucune charge ne passe d'une armature à l'autre ! En réalité le courant ne traverse pas le condensateur… Un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert vis-à-vis d'une tension continue.

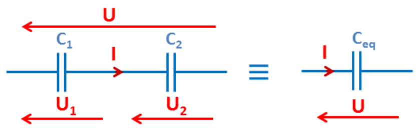


Association parallèle de condensateurs
La même tension est vue par tous les condensateurs :



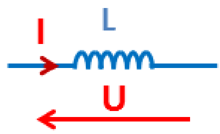
$I = I_1 + I_2 = C_1\frac{dU}{dt} + C_2\frac{dU}{dt} = C_{eq}\frac{dU}{dt}$ soit $C_{eq} = \sum_{k=1}^{N} C_k$

Association série de condensateurs
Le même courant *I* traverse tous les condensateurs, on montre que : $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{C_k}$



● Bobine

Une bobine est un enroulement de fils conducteurs (spires) autour d'un noyau (vide ou d'un noyau facilitant l'induction magnétique).

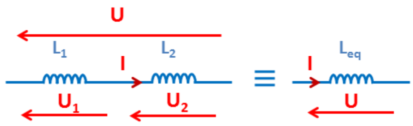


La circulation du courant dans la bobine induit un champ magnétique qui tend à freiner celui-ci. Ce champ magnétique induit est proportionnel à l'inductance *L* qui s'exprime en Henry noté H.

La tension dans une bobine dépend des variations du courant au cours du temps ; Si le courant dans la bobine est continu alors la tension sera nulle et la bobine sera équivalente à un court-circuit.

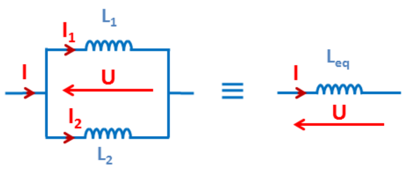
$$\boldsymbol{U = L.\frac{dI}{dt}} \quad (13)$$

Association série de bobines
Le même courant *I* traverse toutes les bobines :



$U_{AB} = U_1 + U_2 = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt}$ soit $L_{eq} = \sum_{k=1}^{N} L_k$

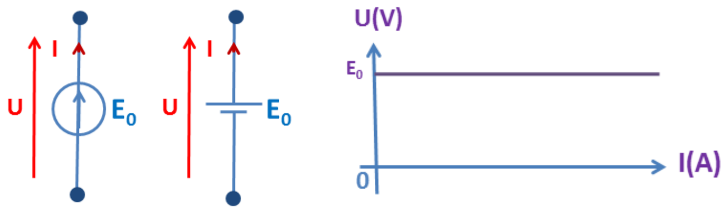
Association parallèle de bobines
La même tension est vue par toutes les bobines, on montre que : $\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{L_k}$



7.2 Dipôles actifs :

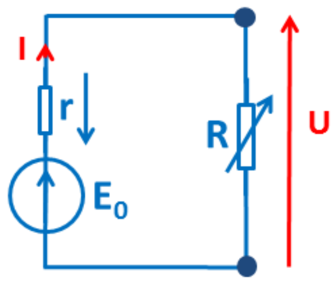
● Source de tension idéale

Elle fournit une tension constante ∀ le courant débité : $U = E_0$.



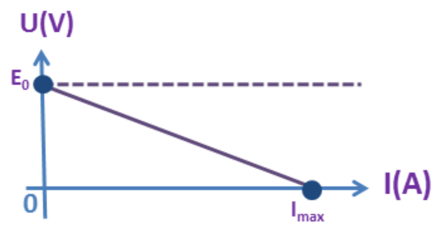
● Source de tension réelle

Une source réelle comporte une résistance interne *r* faible mais non nulle.



Lorsque cette source est connectée à un dispositif électrique, ici modélisé par une résistance *R* variable (d'où la flèche), la tension utile U est diminuée d'une quantité égale au produit *r I*.

Pour les valeurs extrêmes de *R* (0 ou ∞) on décrit les points où :
- la source est en court-circuit ; $U=0$ & $I = I_{max} = E_0/r$,
- la source est en circuit ouvert ; $I = 0$ & $U = E_0$.

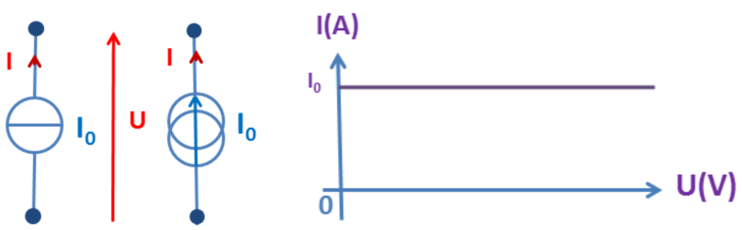


Avec la loi des mailles on pourra montrer que pour une valeur de *R* quelconque la caractéristique de la source est donnée par :

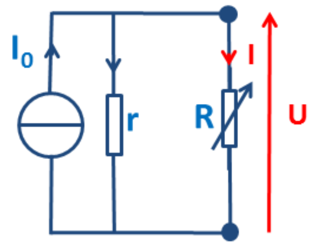
$$U = E_0 - r.I \qquad (14)$$

● Source de courant

Elle fournit un courant constant ∀ la tension à ses bornes : $I = I_0$.

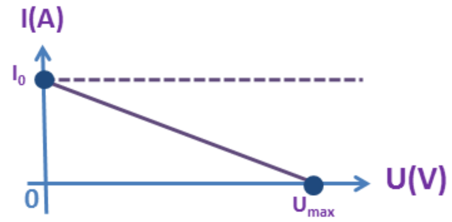


● Source de courant réelle



Une source réelle comporte une résistance interne *r* grande mais non infinie.

Lorsque cette source est connectée à un dispositif électrique, ici modélisé par une résistance *R* variable (d'où la flèche), le courant utile I sera diminué d'une quantité égale au rapport *U / r*.



Pour les valeurs extrêmes de *R* (0 ou ∞) on décrit les points où :
- la source est en court-circuit ; $U=0$ & $I = I_0$,
- la source est en circuit ouvert ; $I=0$ & $U = U_{max} = r.I_0$.

Avec la loi des noeuds on pourra montrer que pour une valeur de R quelconque la caractéristique de la source est donnée par :

$$I = I_0 - \frac{U}{r}$$

III- Réseaux linéaires et régime continu

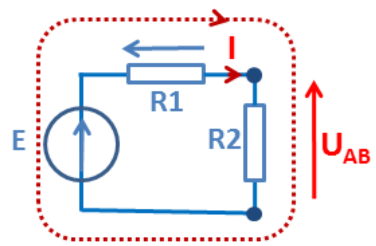
8. Utilisation des lois de Kirchhoff

Les lois de conservations de Kirchhoff permettent de déterminer l'ensemble des tensions et des courants d'un circuit électrique.

8.1 Cas d'une maille unique

● En appliquant la loi des mailles (8) selon le contour orienté fermé (en pointillés rouges) on écrit : $E - R_1 I - R_2 I = 0$.

D'où $I = \frac{E}{R_1+R_2}$ et $U_{AB} = R_2 I = E\frac{R_2}{R_1+R_2}$.

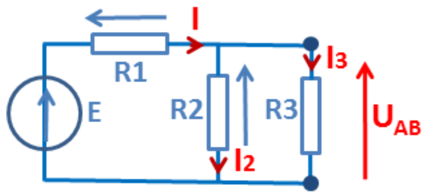


● *L'expression $U_{R2} = E\frac{R_2}{R_1+R_2}$ est typique de ce que l'on appelle un « diviseur de tension » dans laquelle la tension aux bornes d'une résistance s'écrit comme le rapport de la résistance considérée (R_2) sur la résistance totale du circuit (R_1+R_2) multiplié par la tension « vue » par la résistance totale (E).*

Par analogie : $U_{R1} = E\frac{R_1}{R_1+R_2}$.

8.2 Mailles multiples

● En appliquant la loi des mailles (8) $E - R_1 I - R_2 I_2 = 0$; $R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$ et la loi des nœuds (7) $I = I_2 + I_3$ on obtient un système de deux équations à deux inconnues qui permet de déterminer les courants :



$$\begin{cases} (R_1 + R_2)I_2 + R_1 I_3 = E \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad I_2 = E\frac{R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad I_3 = E\frac{R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad I = E\frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

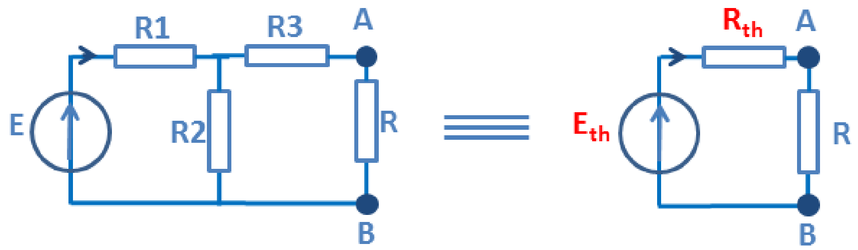
● L'expression de la tension se déduit de la loi d'Ohm $U_{AB} = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R_{eq} I$ où $R_{eq} = \frac{R_3 R_2}{R_3+R_2}$ est l'association de R_2 en parallèle avec R_3 : $U_{AB} = E\frac{R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$

On remarquera que si $R_3 >> R_2$ alors $I_2 >> I_3$; le courant I passera en quasi-totalité dans R_2 comme si R_3 n'était pas connectée ; U_{AB} prendra alors l'expression d'un simple diviseur de tension :
$U_{AB} = E\frac{R_2}{R_1+R_2}$.

9. Théorème de Thévenin

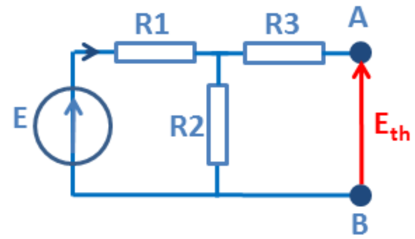
9.1 Enoncé

● Un réseau électrique linéaire, entre deux points quelconques *A* et *B*, est modélisé par un générateur dit de Thévenin (1857-1926) constitué d'une source de tension idéale E_{th} associée à une résistance interne R_{th}.



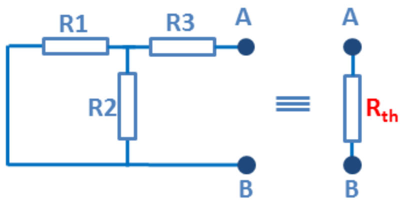
● *Eth* est la tension à vide mesurée ou calculée entre les points *A* et *B.*

La tension à vide sous-entend qu'il n'y a aucun courant entre A et B, il faut donc retirer R pour mesurer ou calculer Eth.



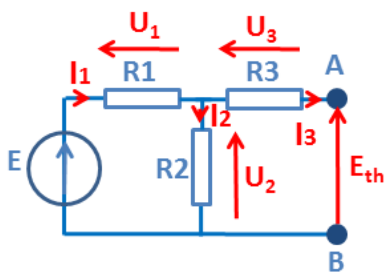
● *Rth* est la résistance mesurée ou calculée entre *A* et *B* lorsque les sources indépendantes sont inhibées.

Une source sera inhibée si elle ne fournit pas d'énergie.
Pour la mesure ou le calcul de Rth, une source de tension sera remplacée par un court-circuit (interrupteur fermé) alors qu'une source de courant sera remplacée par un circuit ouvert (interrupteur ouvert).



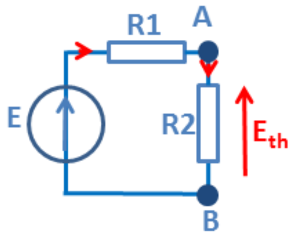
9.2 Exemple

● Dans le circuit ci-dessus, si on souhaite connaitre le courant qui circule dans *R*, on va tout d'abord calculer la tension à vide entre *A* et *B*.
- Puisque le montage est à vide aucun courant ne passe de *A* à *B* et donc $I_3 = 0$ et $U_3 = R_3 I_3 = 0$.
- On peut donc remplacer R_3 par un court-circuit et de fait $U_2 = E_{th}$.



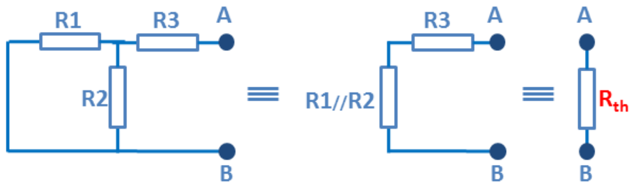
- On reconnait alors le diviseur de tension et donc on obtient :

$$E_{TH} = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



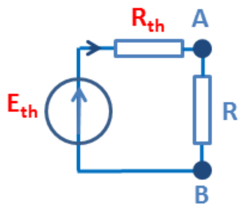
● R_{th} est la résistance équivalente calculée entre A et B lorsque la source E est inhibée (remplacée par un court-circuit) : l'association série de R_3 avec l'association parallèle de R_1 et R_2.

$$R_{TH} = R3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



● Le circuit de départ peut être remplacé par le circuit ci-contre ou le courant qui circule dans R et R_{th} est :

$$I = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R}$$



9.3 Equivalence source de tension - source de courant

● On peut démontrer qu'une source de tension est équivalente à une source de courant et que l'on peut passer d'une représentation à l'autre (cela permet parfois de simplifier un circuit ou un calcul).

● En appliquant le théorème de Thévenin au montage comportant la source de courant réelle *(I_0,r)* on trouve la source de tension réelle *(E_0,r)* où $E_0 = rI_0$.

● A l'inverse, en calculant le courant lorsque R = 0 (on met un court-circuit entre les deux points considérés) on montre que $I = \frac{E_0}{r} = I_0$.

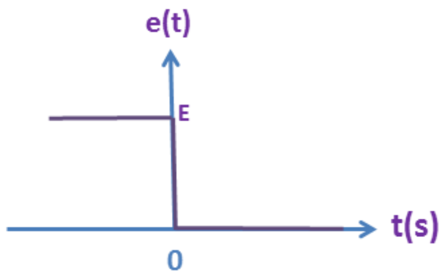
IV- Réseaux linéaires et régime transitoire

On va étudier le comportement de réseaux linéaires lors de variations brutales des signaux électriques appliqués (mise sous tension, coupure d'alimentation, changements brutaux de valeurs…).

La réponse du montage électrique considéré va donc évoluer au cours du temps vers un état final dont on sait, puisque le système étudié est linéaire, qu'il aura in-fine la même forme que l'excitation.

Dans un premier temps, il s'agira de caractériser la réponse *s(t)* d'un système linéaire simple à un échelon de tension *e(t)*, soit un signal de la forme :

e(t) = 0 si t ≤ 0 & e(t) = E si t > 0



e(t) = E si t ≤ 0 & e(t) = 0 si t > 0.

10. Rappels mathématiques

On va se focaliser sur la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants telle que : $\frac{ds(t)}{dt} + a.s(t) = e(t)$ où *a*= cte.

Puisque l'on restreint l'étude à des échelons de tension, la forme de l'excitation *e(t)* est une constante que l'on nommera *b*, l'équation différentielle s'écrira donc :

$$\boldsymbol{\frac{ds(t)}{dt} + a.s(t) = b \quad (15)}$$

La solution de cette équation est la somme de deux solutions :

- la réponse du système libre ou sans excitation (lorsque *b* = 0),

- la réponse du système à une excitation constante (lorsque *b* = cte).

- L'équation sans excitation s'écrit : $\frac{ds(t)}{dt} + a.s(t) = 0$.

Soit $\frac{ds(t)}{dt} = -a.s(t) \Leftrightarrow \frac{ds(t)}{s(t)} = -a.dt$.

Dont la primitive s'écrit : $\ln\big(s(t)\big) = -a.t + c$ avec *c* constant.

En utilisant la fonction réciproque du ln on obtient la solution du système libre aussi appelée solution à l'équation homogène ou sans second membre : $s(t) = e^{-at+c} = e^{-at}e^{c}$.

$\boldsymbol{s(t) = ke^{-at}}$ où *k* est une constante.

● Pour une excitation constante, puisque le système est linéaire, la réponse in-fine sera constante soit *s(t)* = cte et par conséquent $\frac{ds(t)}{dt} = 0$.

L'équation (15) se réduit donc à : $a.s(t) = b$ où $\boldsymbol{s(t) = \frac{b}{a}}$ est aussi appelée solution particulière ou solution en régime permanent.

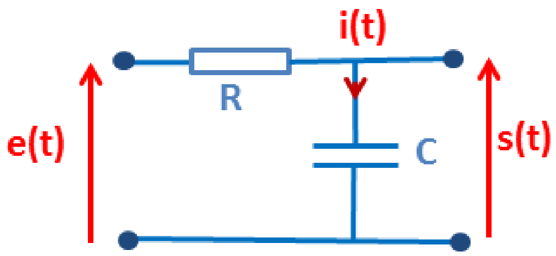
● La solution générale est la somme des deux solutions précédentes soit :

$$\boldsymbol{s(t) = ke^{-at} + \frac{b}{a} \quad (16)}$$

La constante *k* sera déterminée grâce aux conditions initiales, ici la valeur de *s* lorsque *t* = 0.

11. Etude du circuit RC

On va se considérer le montage suivant dans lequel on va s'intéresser à l'évolution temporelle de la tension et du courant aux bornes du condensateur lors d'une mise sous tension ou inversement lors d'une coupure de la tension.



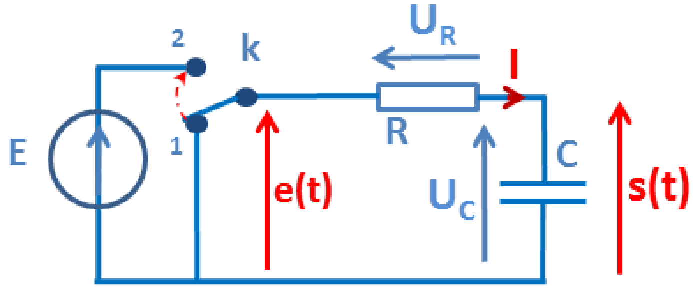
La tension *e(t)* sera de type échelon (variations brutales entre deux valeurs constantes) comme sur les représentations précédentes.

Nous distinguerons les situations de mise sous tension et de coupure de tension où l'on parlera respectivement de charge et de décharge du condensateur.

11.1 Charge d'un condensateur :

● Evolution de la tension à la charge

On va traiter le cas où le condensateur est initialement déchargé c.à.d. que la charge portée par le condensateur et par conséquent la tension à ses bornes sont nulles (cf. eq. 11).



La fermeture à *t*=0 de l'interrupteur *k* (bascule de 1 vers 2) génère une tension d'entrée *e(t)* de type échelon donnant lieu à un déplacement de charges et donc à l'établissement d'un courant.

Sous l'effet de la tension continue E des électrons, en quantité égale, vont respectivement quitter et remplir les armatures supérieure et inférieure du condensateur. On assiste à la charge du condensateur au cours de laquelle il accumule une énergie de nature électrostatique.

Le courant s'exprime (cf. eq. 12) par : $I = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt} = C.\frac{ds(t)}{dt}$.
La loi des mailles permet d'écrire que : $e(t) = U_R + U_C = R.I + s(t)$.
En injectant l'expression du courant, on obtient ainsi l'équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant :

$$\boldsymbol{e(t) = U_R + U_C = RC.\frac{ds(t)}{dt} + s(t)} \quad (\mathbf{17}).$$

Pour que cette équation soit homogène il faut que le facteur *RC* ait la dimension d'un temps, on définit ainsi le temps caractéristique ou constante de temps du circuit par $\boldsymbol{\tau = RC} \quad (\mathbf{18})$.

En reprenant la méthode rappelée au paragraphe précédent on voit que :

- L'équation sans excitation $\tau.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0$ s'écrit $\frac{ds(t)}{s(t)} = -\frac{dt}{\tau}$.
  En intégrant on obtient $\ln(s(t)) = -\frac{t}{\tau} + cte$ qui donne $s(t) = e^{-\frac{t}{\tau}+cte} = k.e^{-\frac{t}{\tau}}$.
- La solution particulière s'obtient en considérant que pour le régime permanent (ou à *t* infini) la tension aux bornes du condensateur est à l'image de l'excitation c.à.d. constante et donc que $\boldsymbol{\frac{ds(\infty)}{dt}} = 0$ ce qui dans l'eq. 16 donne $s(\infty) = e(\infty) = E$.

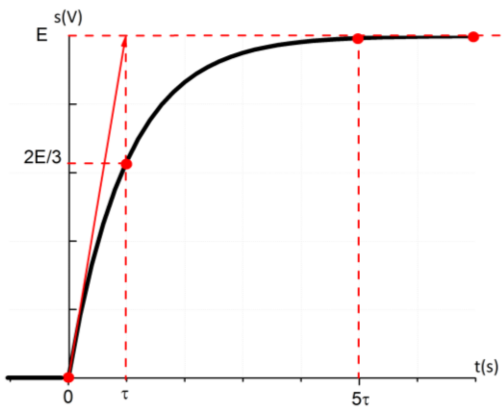
La solution générale s'écrit donc $s(t) = k.e^{-\frac{t}{\tau}} + E$.
En considérant que le condensateur est initialement déchargé soit que $U_C(0) = s(0) = 0$ on trouve que $k = -E$.

La solution complète s'écrit donc : $$\boldsymbol{s(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad (\mathbf{19}).$$

La courbe représentative de la tension aux bornes du condensateur est donnée ci-contre.

La notion de temps caractéristique ou constante de temps prend tout son sens car τ permet de décrire rapidement cette courbe, on remarque que :
- $s(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0.63E \approx \frac{2}{3}E$
- $s(5\tau) = E(1 - e^{-5}) \approx 0.99E$

Avec la dérivée $s'(t) = \frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ on voit que la pente à l'origine $s'(0) = \frac{E}{\tau}$ dépend également de τ.



● Evolution du courant à la charge

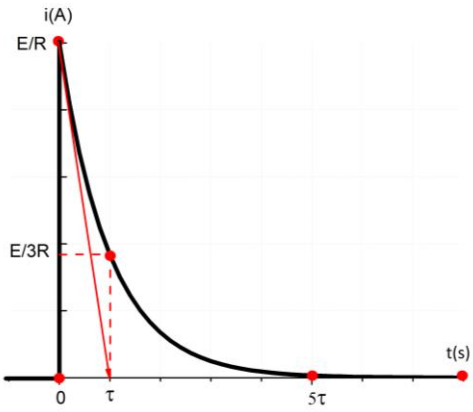
On vient de voir que le courant dans le circuit s'écrit : $I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C.\frac{dU_C(t)}{dt} = C.\frac{ds(t)}{dt}$

En injectant l'expression (19) de s(t) on trouve :

$$\boldsymbol{I(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \mathbf{(20)}$$

On remarque que :

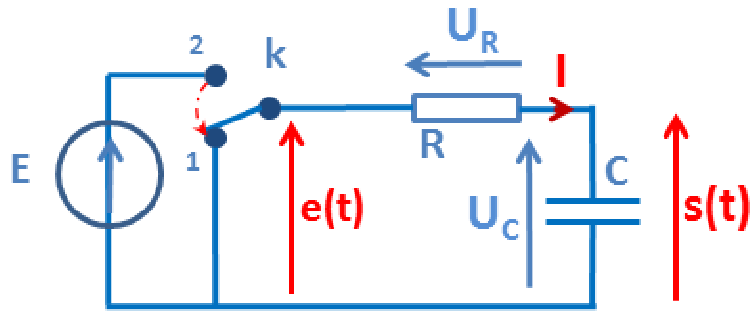
- $I(\tau) = \frac{E}{R}e^{-1} \approx 0.37\frac{E}{R} \approx \frac{E}{3R}$
- $I(5\tau) = \frac{E}{R}e^{-5} \approx 0$
- $I(0^-) = 0 \;\&\; I(0^+) = \frac{E}{R}$
- $I'(0^+) = -\frac{E/R}{\tau}$



11.2 *Décharge d'un condensateur :*

On va traiter le cas où le condensateur est initialement chargé à une tension E.

La bascule à t=0 de l'interrupteur k de 2 vers 1 va générer une tension e(t) basculant brutalement de E vers 0.



Les électrons précédemment accumulés sur l'armature inférieure (q_{inf} = -C.E) vont venir combler le déficit d'électrons de l'armature supérieure (q_{sup} = C.E). On constate que le sens des électrons et donc du courant vont s'inverser par rapport à la charge du condensateur vu juste avant. Ce processus dure jusqu'à l'équilibre où la charge portée par le condensateur est nulle et où il a restitué toute l'énergie accumulée pendant la charge.

● Evolution de la tension à la décharge

Le courant s'exprime (cf. eq. 12) par : $I = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt} = C.\frac{ds(t)}{dt}$.

La loi des mailles permet d'écrire que : $U_R + U_C = R.I + s(t) = 0$.

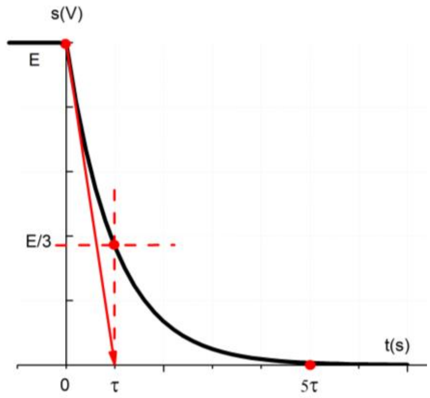
En injectant l'expression du courant, on retrouve l'équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant du système libre : $\boldsymbol{RC.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0}$ dont la solution est : $s(t) = k.e^{-\frac{t}{\tau}}$.

En considérant que le condensateur est initialement chargé soit que $U_C(0) = E$ on trouve $k = E$.

La solution complète s'écrit donc : $\boldsymbol{s(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \mathbf{(21)}$.

La courbe représentative de la tension aux bornes du condensateur est donnée ci-contre.

on remarquera que :
- $s(\tau) = Ee^{-1} \approx 0.37E \approx \frac{1}{3}E$
- $s(5\tau) = Ee^{-5} \approx 0$
- $s'(0) = -\frac{E}{\tau}$.

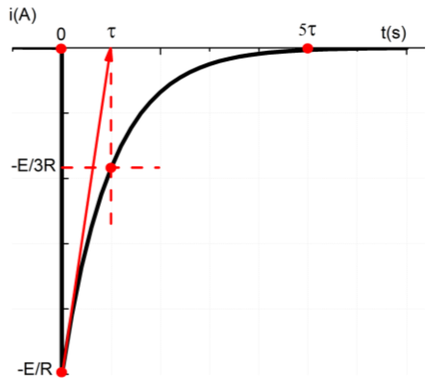


● Evolution du courant à la décharge

On se souvient que $I(t) = C.\frac{ds(t)}{dt}$, donc en injectant *s(t)*, on montre que :

$$\boldsymbol{I(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \textbf{(22)}$$

On remarquera que :
- $I(\tau) = \frac{E}{R}e^{-1} \approx -0.37\frac{E}{R} \approx -\frac{E}{3R}$
- $I(5\tau) = \frac{E}{R}e^{-5} \approx 0$
- $I(0^-) = 0$ & $I(0^+) = -\frac{E}{R}$
- $I'(0^+) = +\frac{E/R}{\tau}$



11.3 Puissance et énergie dans un condensateur:

Au cours de la charge d'un condensateur, celui accumule des charges et dans le même temps une énergie de nature électrostatique. L'expression de cette énergie se détermine à partir de la définition de la puissance : $P(t) = u(t).i(t) = u(t)C\frac{du(t)}{dt} = C\,u(t)\frac{du(t)}{dt} = C\frac{1}{2}\frac{d(u(t)^2)}{dt} = \frac{d(C\frac{u(t)^2}{2})}{dt} = \frac{d(W(t))}{dt}$.

L'énergie emmagasinée par un condensateur s'écrit donc : $\boldsymbol{W_c = \frac{1}{2}C\Delta U^2} \quad \textbf{(23)}$

où la quantité ΔU représente la variation de tension au cours de la charge.

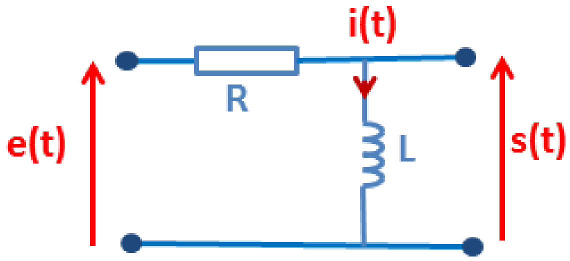
En se rappelant que $q = CU$, on peut également exprimer l'énergie par : $W_c = \frac{\Delta Q^2}{2C}$.

C'est cette même énergie qui est restituée lors de la décharge du condensateur où celui-ci se comporte comme un générateur.

L'énergie s'exprime à partir de la tension aux bornes du condensateur, donc la tension est une grandeur continue comme l'énergie. Seul le courant, dans un condensateur, peut présenter des discontinuités.

12. Etude du circuit RL

On considère le montage suivant dans lequel on s'intéresse à l'évolution temporelle de la tension et du courant aux bornes de la bobine lors d'une mise sous tension ou inversement lors d'une coupure de tension.



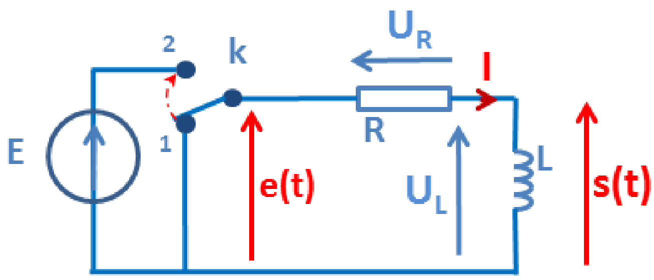
La tension *e(t)* est de type échelon (variations brutales entre deux valeurs constantes) comme sur les représentations précédentes.

Nous distinguons les situations d'établissement et de rupture de courant.

12.1 Etablissement d'un courant dans un circuit à bobine :

● Evolution du courant

On traite la situation où le courant et la tension sont initialement nuls.
La fermeture à *t*=0 de l'interrupteur *k* (bascule de 1 vers 2) va générer une tension d'entrée *e(t)* de type échelon donnant lieu à un déplacement de charges et donc à l'établissement d'un courant.



Sous l'effet de la tension continue E un courant I s'établit dans le circuit. La circulation de ce courant dans la bobine génère un champ magnétique qui tend à s'y opposer. Au cours de ce processus la bobine accumule une énergie de nature magnétique.

La tension aux bornes de la bobine s'exprime (cf. eq. 13) par : $U_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = s(t)$
La loi des mailles permet d'écrire que : $e(t) = U_R + U_L$
En injectant l'expression de la tension, on obtient ainsi l'équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant :

$$\boldsymbol{\frac{e(t)}{R} = \frac{E}{R} = I(t) + \frac{L}{R}\frac{dI(t)}{dt}} \quad (\mathbf{24})$$

Pour que cette équation soit homogène il faut que le facteur *L/R* ait la dimension d'un temps, on définit ainsi le temps caractéristique ou constante de temps du circuit par $\boldsymbol{\tau = L/R} \quad (\mathbf{25})$.

En reprenant la méthode rappelée au paragraphe précédent on voit que :

- L'équation sans excitation $\tau.\frac{dI(t)}{dt} + I(t) = 0$ s'écrit $\frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{dt}{\tau}$
  En intégrant on obtient $\ln(I(t)) = -\frac{t}{\tau} + cte$ qui donne $I(t) = e^{-\frac{t}{\tau}+cte} = k.e^{-\frac{t}{\tau}}$

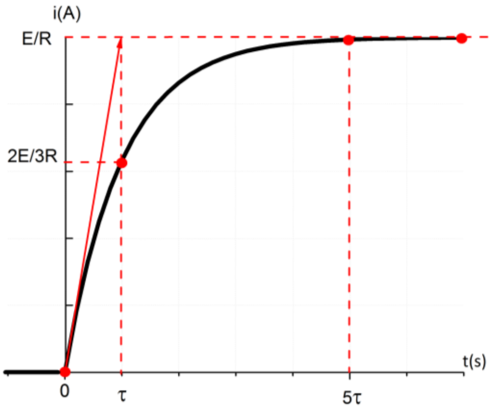
- La solution particulière s'obtient en régime permanent (ou pour t infini) le courant dans la bobine est à l'image de l'excitation c.à.d. constant et donc $\frac{dI(\infty)}{dt} = 0$ ce qui dans l'eq. 24 donne $I(\infty) = \frac{e(\infty)}{R} = \frac{E}{R}$.

La solution générale s'écrit donc $I(t) = k.e^{-\frac{t}{\tau}} + E$.

En considérant que le courant est initialement nul $I(0) = 0$ on trouve $k = -\frac{E}{R}$.

La solution complète s'écrit donc : $$\boldsymbol{I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad \textbf{(26)}.$$

La courbe représentative du courant est donnée ci-contre.



La notion de temps caractéristique ou constante de temps prend tout son sens car τ permet de décrire rapidement cette courbe, on remarque que :

- $I(\tau) = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) \approx 0.63\frac{E}{R} \approx \frac{2}{3}\frac{E}{R}$
- $I(5\tau) = \frac{E}{R}(1 - e^{-5}) \approx 0.99\frac{E}{R}$

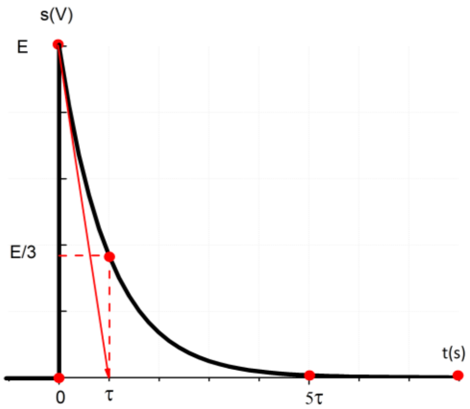
Avec la dérivée $I'(t) = \frac{E}{R}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ on voit que la pente à l'origine $I'(t) = \frac{E}{R}\frac{1}{\tau}$ dépend également de τ.

● Evolution de la tension

On vient de rappeler que la tension aux bornes de la bobine s'écrit : $U_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = s(t)$.

Il suffit de dériver cette expression pour aboutir à :

$$\boldsymbol{s(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \textbf{(27)}$$



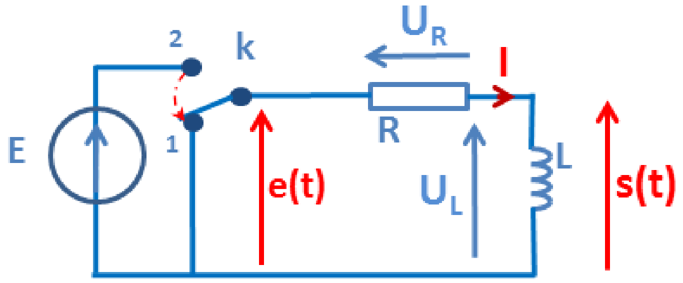
On remarque que :

- $s(\tau) = Ee^{-1} \approx 0.37E \approx \frac{E}{3}$
- $s(5\tau) = Ee^{-5} \approx 0$
- $s(0^-) = 0$ & $s(0^+) = E$
- $s'(0^+) = \frac{E}{\tau}$

12.2 Rupture du courant dans un circuit à bobine :

On traite le cas où le courant dans la bobine aatteint une valeur constante de *E/R*.

La bascule à t=0 de l'interrupteur k de 2 vers 1 va générer une tension e(t) basculant brutalement de E vers 0.



L'énergie emmagasinée dans la bobine est restituée. Le courant décroit continument tandis que la tension s'inverse brutalement. La bobine va se comporter comme un générateur. Ce processus dure jusqu'à l'équilibre où le courant dans le circuit est nul et où la bobine a restitué toute l'énergie emmagasinée.

● Evolution du courant

Le courant s'exprime (cf. eq. 12) par : $U_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = s(t)$

La loi des mailles permet d'écrire que : $U_R + U_L = R.I + s(t) = 0$

En injectant l'expression du courant, on retrouve l'équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant du système libre : $\boldsymbol{\tau.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0}$ dont la solution est : $I(t) = k.e^{-\frac{t}{\tau}}$

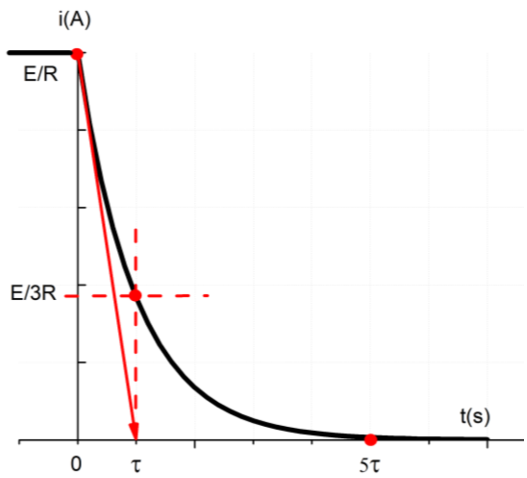
En considérant que le courant avant la rupture est $I(0) = \frac{E}{R}$ on trouve $k = \frac{E}{R}$

La solution complète s'écrit donc : $$\boldsymbol{I(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (28)}$$

La courbe représentative de la tension aux bornes du condensateur est donnée ci-contre.

on remarque que :

- $I(\tau) = \frac{E}{R}e^{-1} \approx 0.37\frac{E}{R} \approx \frac{1}{3}\frac{E}{R}$
- $I(5\tau) = \frac{E}{R}e^{-5} \approx 0$
- $I'(0) = -\frac{E}{R}\frac{1}{\tau}$.

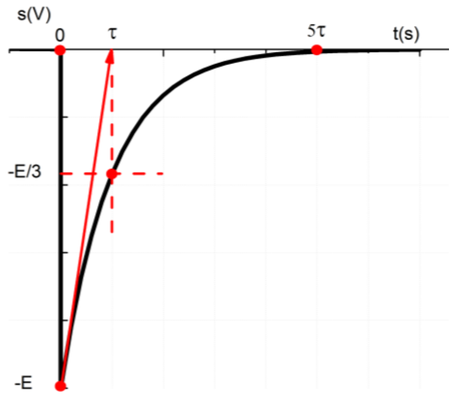


● Evolution de la tension

On se souvient que $U_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = s(t)$,en injectant *I(t),* on montre que :

$$\boldsymbol{s(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \mathbf{(29)}$$

On remarque que :
- $s(\tau) = Ee^{-1} \approx -0.37E \approx -\frac{E}{3}$
- $s(5\tau) = Ee^{-5} \approx 0$
- $s(0^-) = 0$ & $s(0^+) = -E$
- $s'(0^+) = +\frac{E}{\tau}$



12.3 Puissance et énergie dans une bobine:

Pendant l'établissement du courant, la bobine accumule une énergie de nature magnétique. L'expression de cette énergie se détermine à partir de la définition de la puissance :

$$P(t) = u(t).i(t) = L\frac{di(t)}{dt}.i(t) = L\,i(t)\frac{di(t)}{dt} = L\frac{1}{2}\frac{d(i(t)^2)}{dt} = \frac{d(L\frac{i(t)^2}{2})}{dt} = \frac{d(W(t))}{dt}.$$

L'énergie emmagasinée par la bobine s'écrit donc : $\boldsymbol{W_L = \frac{1}{2}L\Delta I^2}$ $\quad \mathbf{(30)}$

où la quantité ΔI représente la variation totale de courant. C'est cette énergie qui est restituée lorsqu'on coupe le courant, et que la bobine se comporte comme un générateur.

L'énergie s'exprime à partir du courant dans la bobine, il est donc logique que le courant comme l'énergie soit une grandeur continue. Seule la tension aux bornes d'une bobine peut présenter des discontinuités.